"Ningún descubrimiento ha sido hecho en matemáticas por un esfuerzo de lógica deductiva; los descubrimientos resultan del trabajo de la imaginación creadora. La lógica interviene como un control. Decide si es verdadero o ilusorio."
H. Lebesgue. Matemático

1 2°BAC CNyS

ÁLGEBRA DE MATRICES

INDICE

1. DEFINICIONES

MATRIZ

Una matriz numérica es una tabla de números que están ordenados según dos índices de variación que llamaremos respectivamente filas y columnas.

Un vector es un conjunto de números ordenados según un índice de variación.

Por ejemplo, las notas de un alumno (8, 7, 5, 9)

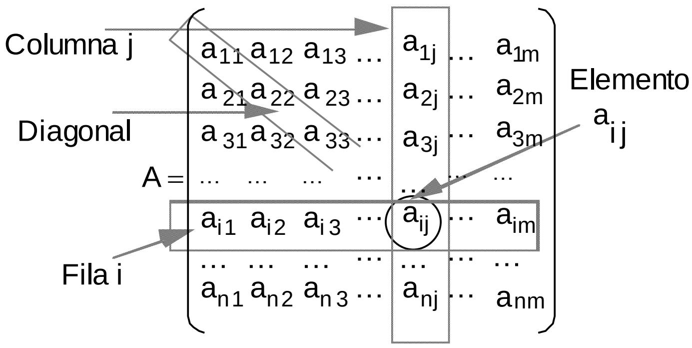
Las notas de una clase: $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Ponerlo en forma de tabla. Lo que significarían las filas: alumno 1, alumno 2, alumno 3… Y las columnas: asignatura 1, asignatura 2, asignatura 3,…

Los coeficientes de un sistema de ecuaciones. Lo que significarían.

Definiciones y notaciones:

Abreviadamente se representa así:



$A = (a_{ij})_{i=1\dots n;j=1\dots m}$

$A = (a_{ij})$

i: nº de fila; j: nº de columna.

Elemento

Se llama así a cada uno de los números que la componen a_{ij}.

Fila i-ésima. Vectores fila

Se designa así a todos los elementos cuyo primer índice es igual a "i". Por ejemplo, la fila primera será: (a_{11}, a_{12}, a_{13}, …a_{1m}).

Columna j-ésima. Vectores columna

Se llama así a todos los elementos que tienen el segundo índice igual a "j". Por ejemplo, la columna segunda estará formada por los elementos: (a_{12}, a_{22}, a_{32},…, a_{n2})

$A = (a_{ij})$ i: nº de fila; j: nº de columna.

Las filas y las columnas de una matriz tienen forma de vectores.

Orden o dimensión de una matriz

Se llama orden de una matriz al nº de filas x el nº de columnas -no como producto sino como par de números-; es decir, n x m.

Traspuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz, definimos como traspuesta de A y representamos por $A^t = (b_{ij})$ tales que $b_{ij} = a_{ji}$. Es decir, la matriz que resulta de cambiar las filas por las columnas.

Podemos hallar la traspuesta de la matriz:

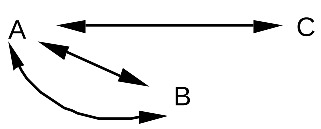
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 9 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$a_{23} =$

Matriz cuadrada

Una matriz que tiene igual número de filas que de columnas. Es decir, que n = m

Por ejemplo, las comunicaciones entre varios puntos de una ciudad.



$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & 2 & 1 \\ 2 & \cancel{0} & 0 \\ 1 & 0 & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Diagonal de una matriz

Son los elementos del tipo a_{ii}. Es decir, que tienen igual nº de fila que de columna.

Simétrica

Una matriz se dice simétrica si: ${}^tA = A$. Es decir, si coincide con su traspuesta. Una matriz simétrica tiene que ser cuadrada.

En un grafo esto significaría que todas las comunicaciones son dobles.

Matriz triangular

La matriz cuadrada que por debajo de la diagonal son todos los elementos cero. La matriz triangular superior (los ceros están debajo), inferior (los ceros están arriba)

2. OPERACIONES CON MATRICES. Deben darse definiciones formales

SUMA

Sean $A = (a_{ij})_{n,\ m}$ y $B = (b_{ij})_{n,\ m}$ dos matrices del mismo orden o dimensión llamaremos suma de ambas: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n,\ m}$. Es decir, la matriz que resulta de sumar término a término ambas matrices. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Podrían ser las notas de la 1ª evaluación más las notas de la 2ª evaluación…

PRODUCTO POR ESCALARES

Sea k ∈ R y A la matriz ya definida anteriormente. Definiremos k · A = (k · a_{ij}). Es decir, multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar correspondiente. Por ejemplo,

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Podría ser que las notas de la 1ª evaluación se multiplican por 3…

PRODUCTO DE MATRIZ FILA POR COLUMNA

Supongamos que en una asignatura 0'6 -control-; 0'2 -trabajo-; 0'1 -clase-; 0'1 -cuaderno-. Y un alumno ha sacado (5, 7, 8, 6). ¿Cuál sería la nota?

Tienen que tener la misma dimensión y se define así:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots a_n \cdot b_n$$

Por ejemplo, notas de clase y peso de cada nota.

PRODUCTO MATRIZ · VECTOR

Es el resultado de multiplicar cada uno de los vectores fila de la matriz por el vector. Nos saldrá un vector columna de tantas coordenadas como filas tiene la matriz.

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el cómputo para varios alumnos.

PRODUCTO DE DOS MATRICES

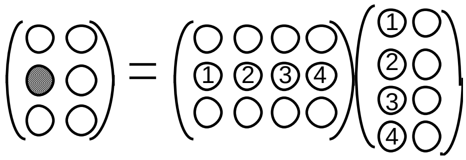
Es el resultado de multiplicar, ordenadamente, todos los vectores fila de la 1ª matriz por todos los vectores columna de la segunda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

4 x 3 · 3 x 2 =

Para poder multiplicar dos matrices $A_{m\mathbf{x}\mathbf{n}} \cdot B_{\mathbf{n}xp}$ el número de columnas de la 1ª ha de ser igual al número de filas de la segunda.

En el gráfico se muestra como se calcula el elemento que ocupa la 2ª fila y 1ª columna



Definición formal –debe enseñarse–

$$A \cdot B = (c_{ik}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk} \right).$$

Visualizarlo así:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & b_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{3k} & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{nk} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ & & \dots & c_{ik} & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \end{pmatrix}$$

3. PROPIEDADES

PROPIEDADES DE LA SUMA (SUPONIENDO ÓRDENES COMPATIBLES)

El elemento neutro de la suma de matrices se llama matriz nula. Es aquélla cuyos elementos son todos iguales a cero.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se llamará opuesta de la matriz A a la matriz que sumada con ella nos de la matriz nula. Es obvio encontrar su expresión:

$$-A = (-a_{ij})_{n,\, m}$$

Así podremos definir la diferencia de matrices:

$$A - B = A + (-B)$$

Asociativa	(A + B) + C = A + (B + C)
Conmutativa	A + B = B + A
Elemento neutro	$0_{m,n}$
Elemento opuesto	$-A = (-a_{ij})$

PRODUCTO DE NÚMEROS POR MATRICES

Asocirtivr	r·(s·A)=(r·s).A
Distrisutivr 1	(r+s)·A=r·A+s·A
Distrisutivr 2	r·(A+B)=r·A+r·B
Elemento neutro	1·A=A

PROPIEDADES DEL PRODUCTO (SUPONIENDO ÓRDENES COMPATIBLES)

Asociativo:

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

Pseudoasociativo:

$$A\cdot(r\cdot B) = r\cdot A\cdot B$$

No es conmutativo.

$$A\cdot B \neq B\cdot A.$$

Poner algún ejemplo para comprobarlo. Luego no es lo mismo el producto por la izquierda que por la derecha.

Porque al dar la vuelta los órdenes pueden no coincidir.

Aunque tengamos matrices de órdenes simétricos; por ejemplo, 3x5 y 5x3, los productos no quedan del mismo orden y por tanto no pueden ser iguales. Una quedaría 3x3 y la otra 5x5.

Luego en todo caso deberían ser del tipo nxn. A estas matrices se les llama matrices cuadradas. Pues bien, incluso con estas falla.

Así tenemos que hablar de producto por la izquierda y por la derecha.

Distributiva

Si sus dimensiones lo permiten se cumple que:

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ y por la derecha también.

Recordar la distributiva de números. Y también por qué al multiplicar dos polinomios hacemos todos por todos. Es como aplicar dos veces la distributiva.

Ejemplos

Desarrollar $(A + B)^2$.

Sabiendo que $(A + I)^2=\mathbf{0}$. Desarrollar y poner A^2 como combinación lineal de A e I.

4. MATRICES CUADRADAS

Se llaman matrices cuadradas a las que tienen igual nº de filas que de columnas. Por lo tanto son de orden nxn. Abreviadamente se escriben M(n). Serían matrices de orden "n".

Al no ser el producto conmutativo tenemos que distinguir el producto de una matriz por la izquierda de la derecha ya que los resultados serán diferentes.

Poner ejemplo.

Esto es muy importante a la hora de resolver una ecuación matricial.

Por ejemplo, se despeja distinto de $A\cdot X=B$ que de $X\cdot A=B$

Poner ejemplo.

El elemento neutro del producto. Matriz identidad

La matriz que deja invariante a cualquiera por ambos lados. Es decir, A . I = I . A. Por reflexiones análogas a las anteriores, esto sólo tiene sentido para las matrices cuadradas.

La matriz identidad resulta ser: $I = (b_{ij})$ tales que $b_{ii} = 1$ para todo i y $b_{ij} = 0$ para $i\neq j$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Elemento inverso

Una vez que tenemos un neutro se puede hablar de un elemento inverso. Se define como aquella matriz A^{-1} que multiplicado por una matriz da la identidad por ambos lados. Es decir, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Averigua la matriz inversa de la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESPACIO VECTORIAL Y RANGO DE MATRIZ.

Están en el tema 2: rango por determinantes

5. EJEMPLOS

UN SISTEMA DE ECUACIONES

Es susceptible de ser expresado por una matriz: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matriz de los coeficientes, incógnitas y término independiente.

$A \cdot X = B$

Las filas de la matriz son las ecuaciones:

(2, 3, –1, 6) es la primera ecuación: $2x + 3y - z = 6$

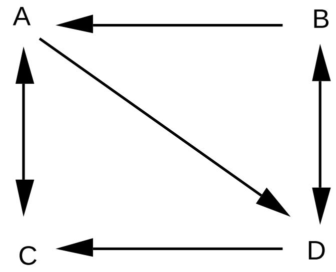
Las columnas se corresponden con los coeficientes de las incógnitas:

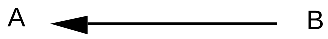
$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ es la columna de los coeficientes de la “y”.

REDES DE COMUNICACIÓN Y SOCIOGRAMAS

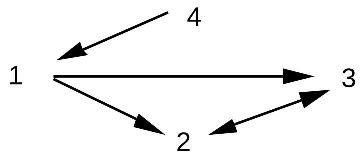
En una ciudad hay cuatro puntos claves A, B, C y D y las comunicaciones entre ellos lo son según el siguiente grafo. También se podría interpretar como sociograma. Elegir un ejemplo.

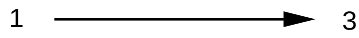
En una clase, en un partido político, una asociación… quiere ver cómo está el liderazgo.





De B a A hay comunicación





1 muestra preferencia por 3

Este ejemplo también admite una expresión matricial de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c} \\ \text{Partidas} \end{array}
\begin{array}{c c}
 & \text{Llegadas} \\
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}}
\end{array}
$$

Las filas son los puntos de partida y las columnas son los puntos de llegada.

A son las comunicaciones (preferencias) directas, A^2 las comunicaciones con una escala,… Y así sucesivamente. Pensar en los vuelos de avión.

La suma de estas matrices me daría todas las comunicaciones posibles.

GIROS

Por ejemplo, el giro de ángulo α:

Giro de ángulo α la matriz es: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Ver cómo queda el giro de 90º con un dibujo transformando el vector (2, 1) por ejemplo. Luego el de -90º. La composición que es producto de matrices… Se podría ver el giro de la suma y ver que coincide con la fórmula trigonométrica.

Con un giro de 45º se trabaja bastante bien. Definir luego la inversa, …

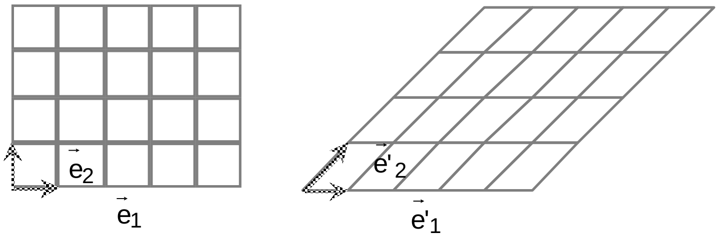
También se puede ver el sentido de la composición, por ejemplo, de dos giros quedaría muy bien.

LA MATRIZ COMO CODIFICACIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN EN UN ESPACIO VECTORIAL. OPTATIVO

Una matriz se puede concebir como un conjunto de vectores filas o columnas según hemos dicho más arriba.

Una transformación en un espacio vectorial se dice lineal si conserva las combinaciones lineales. Es decir, que si un vector referido a una base $\{e_1, e_2\}$ es $\mathbf{v} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$; después de la transformación seguirá siendo $\mathbf{v'} = x\mathbf{e'_1} + y\mathbf{e'_2}$; donde hemos representado con apóstrofe a cada uno de los transformados.

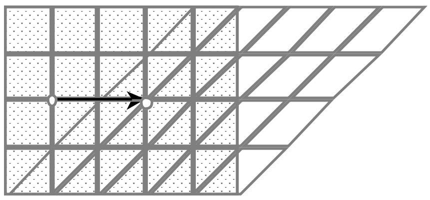
Por ejemplo,



Esto es lo que se llama una afinidad. Pues bien, en este caso es claro, que los transformados se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$$

Es decir, que la matriz que define la transformación coincide con la de los vectores transformados de la base.



Aquí se ven bien las nuevas coordenadas referidas a la base canónica. Por ejemplo, el (1, 2) del principio se ha transformado en el (3, 2).

También ver que los vectores columna me dan la transformación de la base y, por tanto, la transformación de las tramas del plano.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Para resolver ejercicios que requieran calcular A^n, habría que utilizar el método de inducción (en el libro de Anaya viene en la parte de ejercicios resueltos). Este método demuestra una propiedad para todos los números naturales.

Una forma sencilla de establecerlo sería el ejemplo de las fichas del dominó:

1. La 1ª ficha cae.
2. Si cae una ficha cae la siguiente.

La conclusión es que todas las fichas caen.

Dicho con otras palabras, si una propiedad se cumple para n = 1 y si también se cumple que si se cumple para "n" también se cumple para "n + 1" entonces la propiedad se cumple para todos los números naturales.

También puede ser la transmisión de un secreto en clase:

1. El nº 1 lo sabe.
2. Si lo sabe el nº n entonces lo sabe el compañero n+1

Es claro que si se cumplen las dos cosas lo saben todos.

Proponer algún ejemplo.

Demostrar que: $1+2+3+\cdots n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Formalmente sería que si una propiedad P es cierta para el 1: P(1) y que esa propiedad sea cierta para n implica que también lo es para el siguiente: P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) entonces dicha propiedad es cierta para todos los números naturales.

$$\left.\begin{array}{l} P(1) \\ P(n)\Rightarrow P(n+1) \end{array}\right\} entonces\ P(n)\ \forall n\in N$$